数理解析研究所講究録
296巻 1977年 70-81

Cell Lineage System と L System における生長表現能力

京大・理 西尾英之助

1. はしがき

ある種の藻や菌にみられるように，細胞が一列に並んで，分枝を出したりして，個体を構成している植物は糸状体をなすと云われる。 糸状体植物の生長過程を離散モデル化したものにA. Lindenmayer [1968] の L system論がある。 ここでは，新たに cell lineage tree（細胞系統樹）の考え方に基づいて，同様の試みをし，生長の表現能力についてL systemとの比較を行なう。

2. 諸定義

（directional, propagating, deterministic）な分枝を持たない cell lineage system（CL system）は並列書換系の一種で（$A, \widetilde{D}$）あるいは単に$\widetilde{D}$で定義される。 ここで $A=\{0,1\}$，$\widetilde{D}$はつぎの条件を満たし，cell division time spectrumと云う。

i) $\widetilde{D}=(D_0, D_1, \ldots)$，各$D_i$は$A^*$の recursive subset である。

ii) $D_i \cap D_j = \phi \qquad (i \neq j)$

iii) $\bigcup_{i \geq 1} D_i \cup D_0 \cdot A^* = A^*$

いま $W = (w_1, k_1)(w_2, k_2) \cdots (w_n, k_n)$, $\quad w_i \in A^*$, $\; k_i \geq 1$ を cell (w_i, k_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ から成る糸状体という。w_i を cell の history, k_i を age という。

<u>並列書換規則 Ri)〜R iii)</u>

W の各 cell (w, k) につぎの規則を適用する。$(W \underset{D}{\Rightarrow} W')$

Ri) $w \in D_i$, $\; 1 \leq k \leq i-2$ なら $(w, k) \longrightarrow (w, k+1)$

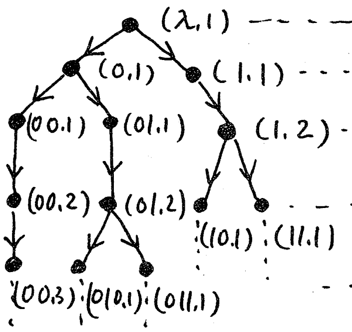
Rii) $w \in D_i$, $\quad k = i-1$ なら $(w, k) \longrightarrow (w0, 1)(w1, 1)$

Riii) $w \in D_0$ なら, $\forall k \geq 1$ について $(w, k) \rightarrow (w, k+1)$

CL system $\tilde{D}$ について, $S(\tilde{D}) = (W_0, W_1, \ldots, W_i, W_{i+1}, \cdots)$, ただし $\forall i \geq 0$ $W_i \underset{D}{\Rightarrow} W_{i+1}$ のとき, $S(\hat{D})$ を $\hat{D}$ の <u>生長系列</u> という。

言語理論や L system 論と同様, $\tilde{D}$ について, 規則 Ri)〜Riii) により, derivation tree $T(\tilde{D})$ を定義する。

<u>例</u> $\quad D_0 \ni 00$, $\quad D_1 \ni \lambda, 0, 11$, $\quad D_2 \ni 1, 01$,



$W_0 = (\lambda, 1)$

$W_1 = (0, 1)(1, 1)$

$W_2 = (00, 1)(01, 1)(1, 2)$

$W_3 = (00, 2)(01, 2)(10, 1)(11, 1)$

$W_4 = (00, 3)(010, 1)(011, 1) \cdots$

分枝のある CL system （BCL system）

$\hat{D} = (D_0, D_1, D_1^b, D_2, D_2^b \cdots)$ とし，i)〜iii) の条件を満たす。書換規則は Ri)〜Riii) に対して

Bi) $w \in D_i$ or D_i^b, $1 \leq k \leq i-2$ なら $(w, k) \to (w, k+1)$

Bii) $w \in D_i$, $k = i-1$ なら $(w, k) \to (w0, 1)(w1, 1)$

Bii)' $w \in D_i^b$, $k = i-1$ なら $(w, k) \to (w0, 1)[(w1, 1)]$

Biii) = Riii) $w \in D_0$, $\forall k \geq 1$ $(w, k) \to (w, k+1)$

Biv) $[\to [$, $] \to]$

CL system と同様に $W \underset{\hat{D}}{\Rightarrow} W'$，生長系列，生成樹を定義することができる。

（分枝のある）生長の抽象形

POL system $G_a = \langle \{c, [,]\}, \{c \to c, c \to cc, c \to c[c], [\to [,] \to]\}, c \rangle$ で生成される系列の任意の一つを（分枝のある）糸状生長の抽象形といい，$X = (x_0, x_1, \cdots)$ で示す。

生長の強弱実現

いま BCL system $\hat{D}$ の生長系列 $S(\hat{D}) = (W_0, W_1, \cdots)$ と生長の抽象形 $X = (x_0, x_1 \cdots)$ に対して，写像 h（$h((w,k)) = c$ $\forall (w,k)$, $h([) = [$, $h(]) =]$）によって $\forall i \geq 0$, $h(W_i) = x_i$ となるとき，$\hat{D}$ は X を弱(BCL)実現するという。（記号で $\hat{D} \supset X$）

また $T(\hat{D})$ と X の生成樹 $T(X)$ が node のラベルを無

視して一致するとき(同型)、$\hat{D}$はXを強(BCL)実現するという。記号で $\hat{D} \Supset X$。

L system Gについても同様に、$h'(S(G)) = X$、
h'は $\forall a \in \Sigma$ $h'(a) = c$ $h'(() = [$, $h'()) =]$ なる homomorphism
なるとき、GはXを弱(L)実現するという。$G \supset X$。

Gの生成樹 $T(G)$ とXのそれが同型のとき、GはXを強(L)実現するという。$G \Supset X$。

強弱生長等価

$\hat{D}$とG(あるいは$\hat{D}$と$\hat{D}'$、GとG')について、
$\hat{D} \supset X$ かつ $G \supset X$ ($\hat{D} \Supset X$ かつ $G \Supset X$)なら、夫々
$\hat{D}$とGは弱(強)生長等価であるという。
明らかに強等価なら弱等価であり、逆は真でない。

3. BCL system と BPDIL system の生長等価性

書換規則の右辺の長さが高々2であるL systemをbifurcating L systemといい、BPDIL systemなどと書く。

$\boxed{\text{定理1}}$ 任意の(分枝のある)BPDIL system Gに対し、それと強生長等価な(B)CL system $\hat{D}$が存在する。

略証 Gの生成樹から、節のラベルを除いたものは、生長の抽象形の生成樹と考えられる。そのrootから順にA^*の元

をラベルとして各nodeにつけてゆき、各nodeが2分裂(bifurcate)するに要する時間がわかるから、各iについてD_i, D_i^bがわかる。またそれらの集合がrecursiveであることもわかる。

定理2 弱生長等価なIL systemをもたないCL systemが存在する。

<u>証明</u>

$$
\begin{cases}
D_i = \{ w \mid w \in \{0\}^+,\ 2^{|w|^2} = i \} & i \geq 2 \\
D_1 = \{ \lambda \} & \\
D_0 = A^* - \bigcup_{i \geq 1} D_i &
\end{cases}
$$

とすれば、$(A, \tilde{D})$は無限生長をし、その生長関数($f(n) = |w_n|$)は明らかに$\log n$のorderより遅い。他方L system論で知られるように任意のL systemの生長関数は$\log n$のorder以上である。■

spectrumが有限個の成分($D_0, D_1, \ldots, D_k^b$)から成り、各成分がすべて正規集合であるとき、BCL systemは<u>有限正規system</u>という。

定理3 任意の(分枝のある)BPPOL system Gに対して、Gと強生長等価な(B)CL systemで有限正規のものが存在する。

証明　$G=(\Sigma, P, w_0)$ は bifurcating であるから，書換規則 P はつぎのいずれかの形をしたものから成る。

1)　$a \to b$,　2)　$a \to bc$,　3)　$a \to b[c]$

4)　$[\to [$　5)　$] \to]$

この性質を使って G から cell division diagram $T(G)=(V,E)$ をつくる。ここで vertex の集合 V は

$V=\{a \mid a\in\Sigma,\ a\neq [,\ ]\}\cup\{\bar{a} \mid a$ が P 中で $x\to y[a]$ として現われる$\}$,

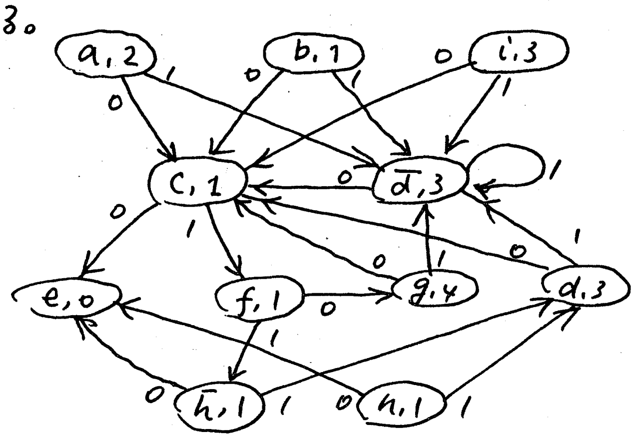
E は $V\times V$ の部分集合で，つぎのような edge の集合である。G は deterministic だから，$a\in\Sigma$ から出発して P の規則を順に適用してゆくと，$a\to\cdots\to bc$ と2分裂する場合と $a\to\cdots\to b\to\cdots\to b$ のように分裂せずに周期的になる場合とがある。前者の場合 $a\xrightarrow{0} b$ と $a\xrightarrow{1} c$ なる edge が E の中にあることとし，後者の場合は edge は定義しない。また $a\to\cdots\to b[c]$ のときは $a\xrightarrow{0} b$ と $a\xrightarrow{1} \bar{c}$ を edge とする。$a\xrightarrow{0(1)} b$ のとき $\bar{a}\xrightarrow{0(1)} b$ とする。

さらに各 vertex に index を与える。すなわち a から出発して，i step で2分裂（分枝を出してもよい）する場合は a に index i を与え，さらに，$\bar{a}$ にも index i を与える。a から出発して永久に分裂しないときは，a に index 0 を与える。こうして $T(G)$ は各 vertex に index のついた

finite transition system となる。

[例]. P: $a \to b$, $b \to c[d]$, $c \to ef$, $d \to a$, $e \to e$
$f \to g[h]$, $g \to i$, $h \to ed$, $i \to a$ とすると $\Gamma(G)$ は
図のようになる。

$\Gamma(G)$



さて簡単のために $w_0 = a_0 \in \Sigma$ と仮定する。$\Gamma(G)$ において、a_0 を初期状態とし、index i をもち、バーのついた状態へ直接行かないような状態の集合を最終状態集合とすると、この有限オートマトンによって受理される入力系列の集合が division spectrum の D_i となる。最終状態として index 0 をもつ vertex の集合をとると D_0 が求まる。また、index i をもち、バーのついた状態へ直接 edge がついている状態の集合を最終状態とすると、D_i^b が得られる。これらの集合がすべて正規集合であり、有限個しかないことは明らかである。故に $w_0 = a_0$ の場合、定理が成立つ。

$w_0 = a_1 a_2 \cdots a_l$ ($a_i \in \Sigma$) の場合は、各 a_j について、上記のように D_i ($D_{a_j i}$ と書く) や $D^b_{a_j i}$, $D_{a_j 0}$ などを

求める。さらに、長さ $\lceil \log_2 \ell \rceil$ の A^* の元を B_j として、(B_j は j の2進法展開) $D_i = \bigcup_{j=1}^{\ell} B_j \cdot D_{a_j i}$ ($i=0,\ldots,k$) (k は $\Pi(G)$ の index の最大値) をつくる。 また $D_i^b = \bigcup_{j=1}^{\ell} B_j \cdot P_{a_j i}^b$ とする。 こうして $G=(\Sigma, P, \omega_0)$ に対する BCL system の division time spectrum $\tilde{D}=(D_0, D_1, D_1^b, \cdots)$ が求まる。 [証明終り]

つぎの定理は定理3の逆である。

$\boxed{\text{定理4}}$ 任意の有限正規な(B)CL system $\tilde{D}$ に対して、これと強生長等価な(分枝のある)BPD0L system が存在する。

<u>証明</u>

以下のような定理2.3, A.Salomaa[1969]を利用する。すなわち、あるアルファベット上の正規表現が有限個与えられたとき、それらから、1個の有限オートマトンを構成し、そのオートマトンの最終状態集合を適当に定めることにより、与えられた正規表現に対応する集合を受理するようにできる。

さて与えられた互いに素な正規集合の有限系 $\tilde{D}$ に対して、この定理によって、それらの各々を受理するオートマトン $A_{\tilde{D}}$ をつくる。 D_i や D_i^b の受理状態集合を F_i, F_i^b と書く。さらに $F_i=\{g_{i1}, g_{i2}, \cdots, g_{in_i}\}$ とする。 F_i や F_i^b は互いに素である。 さて、$i\neq 0$ として、$g_{ij}\xrightarrow{0} g_{km}$, $g_{ij}\xrightarrow{1} g_{hg}$ だとする。 Gの書換規則をつくるために、新

しい記号 g_{ij}^s $(s=1,2,\ldots i-1)$ を導入して、つぎのような規則をつくる。

1) $g_{ij} \to g_{ij}^1$ 　　2) $g_{ij}^s \to g_{ij}^{s+1}$ $(s=1,2\cdots i-2)$

3) $g_{ij}^{i-1} \to g_{km}\, g_{hg}$

もし g_{ij} が F_i^b の元であれば 3)のかわりに

3') $g_{ij}^{i-1} \to g_{km}[g_{hg}]$

を規則とする。さらに

4) $g_{oj} \to g_{oj}$ $(j=1,2,\ldots,n_0)$, 5) $[\to[$, $]\to]$

を追加する。

このようにして、$\tilde{D}$から(分枝のある)BPD0L systemをつくることが出来た。これは明らかに強生長等価である。

[証明終り]

上記の定理3,4から、有限正規なBCL systemと分枝のあるBPD0L systemが生長実現能力において等価であることがわかる。以下の2定理から、有限であっても正規でないBCL systemは、分枝のあるBPD<1,1>L systemと比較不能となる。

定理5 　$\tilde{D}=(D_1, D_2)$, $D_2=\{0^{i^2} \mid i=1,2\cdots\}$,
$D_1=A^*-D_2$

とすると、$\tilde{D}$と弱生長等価なBPD<1,1>L systemは存在しない。

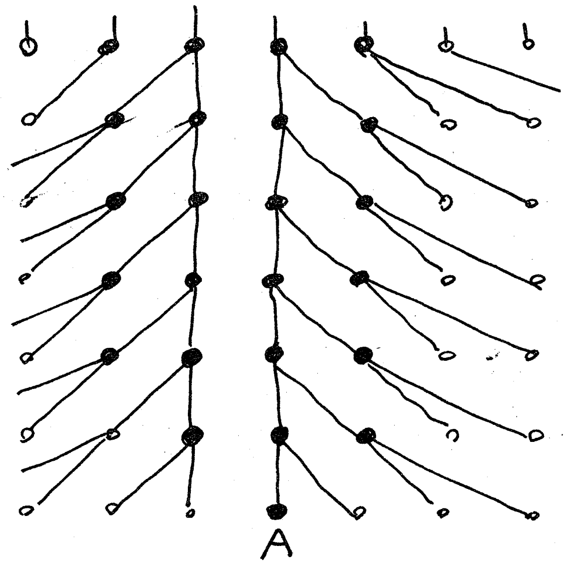
証明　$\tilde{D}$ の derivation tree $T(\tilde{D})$ をつくり、各 node の label を無視し、すべて c と考える。時刻 t の系列を W_t と書き、その列 $\{W_0=c, W_1, W_2, \ldots\}$ を考える。明らかに

$$|W_{i+1}| = 2|W_i|, \quad i \neq k^2+k-1 \quad (k=1,2,\cdots)$$
$$= 2|W_i|-1, \quad i = k^2+k-1 \quad (k=1,2,\cdots)$$

云いかえれば、時刻 $i_k = k^2+k-1$ を除いて、すべての cell が2分裂し、i_k では1個だけの cell が分裂しない。

いま $\tilde{D}$ と弱生長等価な BPD<1,1>L system G が存在すると仮定し、その derivation tree を T(G) とする。いま時刻 i_k で分裂しなかった cell A をとる。すると、$i_{k-1}+1$ から i_k-1 の間、A の祖先はすべて分裂していることになる。したがって下図に示すように、この間 cell A の近傍の高々5ヶの cell が時刻 i_k の cell A に影響を及ぼす。

$t = i_k$



さて、1ケの cell のとりうる状態数は有限であるから、これを s とすると、cell A は $t = i_{k-1}$ 後高々 s^5 時間しか認識することが出来ない。他方 $i_k - i_{k-1} = 2k$ はいくらでも大きくなるから、cell A が $t = i_k$ で丁度分裂しないようにすることは不可能である。 [証明終り]

つぎの定理は、定理5の逆であって、有限 CL system は必ずしも BPD<1,1>L system より生長表現能力が高くはないことを示している。

定理6　BPD<1,1>L system で弱生長等価な有限の CL-system をもたないものが存在する。

証明　無限生長をする有限 CL system の生長は、時間に対して線型かより大きなオーダーをもつ。他方 Vitányi [1974] によって対数関数のオーダーで生長する BPD<1,1>L system が存在することが示されている。 [証明終り]

4. まとめ

分枝のない場合とある場合について、Cell Lineage を基にした CL system を提案した。これは、一般に L system よりも生長表現能力が高いが、有限正規な場合に限れば BPD0L system と等価であることを示した。また、有限であっても正規でないときは、CL system と BPD<1,1>L system と生

長の表現能力の大小はつけられないことを示した。

最後に、定理5の証明に有益な討論をしていただいた岡部代や、全体にわたって討論していただいた小渕、三島、西橋関の各氏に感謝する。

[参考文献]

Lindenmayer, A. [1968] : J. Theor. Biol. vol.18 pp 280→315

Hermann. G.T. and Rozenberg. G. [1974] : "Developmental Systems and Languages", North Holland.

Salomaa, A [1969] : "Thory of Automata". Pergamon Press.

Vitányi, P.M.V. [1974] : Growth of Strings in Context dependent Lindenmayer Systems, in "L-Systems", Lecture Note, Springer-Verlag.